

## 浮動小数点演算を用いたデジタルフィルタの状態方程式に基づく合成理論に関する研究

著者	赤嶺 政巳
号	985
発行年	1984
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/9732">http://hdl.handle.net/10097/9732</a>

氏 名	あか 赤	みね 嶺	まさ 政	み 巳
授 与 学 位	工	学	博	士
学位授与年月日	昭和 60 年 3 月 26 日			
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 1 項			
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 (博士課程) 電子工学専攻			
学 位 論 文 題 目	浮動小数点演算を用いたデジタルフィルタの状態 方程式に基づく合成理論に関する研究			
指 導 教 官	東北大学教授 樋口 龍雄			
論 文 審 査 委 員	東北大学教授	樋口 龍雄	東北大学教授	斎藤 伸自
	東北大学教授	竹田 宏	東北大学助教授	亀山 充隆

## 論 文 内 容 要 旨

デジタル信号処理は，アナログ信号処理と比べて，柔軟性に優れているなど多くの利点を有し，近年の L S I 技術の発達に伴い，通信を始めとする多くの分野において重要な役割を担うに至っている。

デジタル信号処理においては，リアルタイム処理とハードウェアの小型化が要求されるため，従来，演算方式としては固定小数点演算が主に用いられている。しかし，固定小数点演算は，ダイナミックレンジが小さく，絶対値の小さい信号に対して精度が悪くなる欠点を有する。これに対して，浮動小数点演算は広いダイナミックレンジにわたり一定の精度が得られる利点を備えており，近年，地震情報処理などのデジタル信号処理の分野において，浮動小数点演算に対する要求が強くなっている。この要求に対し，従来，大型や中型の計算機で用いられていた浮動小数点演算が，最近では，L S I 技術の進歩を背景に，マイクロプロセッサやシグナルプロセッサ，専用 L S I などの小型ハードウェアにも用いられる傾向になってきた。このような場合には，ハードウェアの規模や処理速度の面から演算や数値表現の語長が制限されるので，有限語長実現に起因する種々の誤差が問題となる。浮動小数点演算を用いた場合の誤差の大きさは，適切にスケーリングされた固定小数点演算を用いた場合と同じ程度であり，有限語長実現に起因する誤差の問題は，浮動小数点演算を用いた場合でも大きな問題となる。

デジタル信号処理において，最も重要な処理方法は，デジタルフィルタリングと離散的フー

リエ変換である。これらの処理の中で、特に帰還路を有するディジタルフィルタにおいて、有限語長実現に起因する誤差が出力に大きな影響を与える。浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの有限語長実現に起因する誤差は、入力量子化誤差、演算誤差（丸め誤差と切り捨て誤差）、係数量子化誤差、アンダフロー誤差、オーバフロー誤差、リミットサイクルに分類される。これらの誤差は、入力量子化誤差を除いて、ディジタルフィルタの構造（乗算、加算、遅延の構成）に大きく依存する。従って、ディジタルフィルタの具体的実現においては、有限語長実現に起因する各種の誤差が最小となる構造を見い出すこと、すなわち、合成が重要な課題となる。

しかし、ディジタルフィルタの有限語長実現に起因する誤差に関する従来の研究は、固定小数点演算を用いた場合がほとんどであり、浮動小数点演算を用いた場合に対しては、演算誤差の解析を除いて行われていない。しかも、演算誤差の解析は、構造を十分には表現できない伝達関数を用いて行われているため、直接形、並列形、縦続形の限られた構造に対してのみ個別に行われているに過ぎない。このため、浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタに対して、前述の各種の誤差の任意の構造に対する統一的な解析や、各種の誤差が最小となる構造の合成は全く行われていない。これは、浮動小数点演算が従来は大型や中型の計算機で実行され、誤差が大きな問題とならなかったことと、浮動小数点演算における誤差の取り扱いが難しいことによるものと考えられる。浮動小数点演算における誤差の性質が固定小数点演算におけるそれと基本的に異なる点は、誤差の大きさが信号の大きさに比例することであり、このことが、浮動小数点演算を用いた場合の誤差最小化の問題を非線形最適化の問題とし、難しいものとする。

本論文は、状態方程式に基づいて構造を記述し、有限語長実現に起因する各種の誤差が全て最小となる浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの合成理論を与えたものであり、次の7章よりなる。

**第1章**は、本論文の研究の背景と目的を述べた緒言である。

**第2章**では、本論文で扱っている浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの基礎について概説している。まず、ディジタルフィルタの設計手順（近似、解析・合成、実現）の概要を述べ、合成問題の位置付けと重要性を明確にしている。次に、浮動小数点演算を実行する際の問題点と浮動小数点演算ハードウェアの最近の動向について述べている。

**第3章**では、浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの状態方程式に基づく表現法と取り扱いについて考察している。まず、無限語長で実現されたディジタルフィルタを状態方程式で記述し、ディジタルフィルタの構造の多様性が等価変換行列によって統一的に表されることを示している。次に、浮動小数点演算における誤差の取り扱いについて考察し、各種の誤差を含む有限語長ディジタルフィルタを状態方程式で記述している。また、状態方程式で記述される各種の誤差を構造依存性の点から検討し、本論文で扱う問題を明確にしている。

**第4章**では、浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの各種の誤差の解析を任意の構造に対し統一的に行っている。まず、演算誤差の解析と係数量子化誤差の解析を統計的に行っている。次に、アンダフロー誤差とオーバフロー誤差の解析を行っている。アンダフロー誤差の解析は、演算誤差の解析と同様に各演算後に白色雑音を加わったものとして行われる。一方、オーバフロー誤差

の解析は、オーバーフローの非線形特性を線形近似し、係数量子化誤差の確定的解析に帰着させることによって行われる。なお、入力量子化誤差は構造に依存しないため、その解析は付録で行っている。また、本章で得られた結果を固定小数点演算を用いた場合と比較することによって、浮動小数点演算を用いたデジタルフィルタの誤差の性質を明らかにしている。最後に、計算例を用いて本章で得られた解析結果の妥当性を示している。

第5章では、第4章の解析結果に基づいて、浮動小数点演算を用いた量子化誤差（演算誤差、係数量子化誤差）最小デジタルフィルタの合成法について考察している。まず、演算誤差と係数量子化誤差の定量的な関係を求め、次に、その関係に基づいて、量子化誤差最小化の問題を定式化している。この結果、量子化誤差最小化の問題が、係数量子化誤差の最小化と加算順序の最適化の問題に分けられる。次いで、適当な等価変換を用いて係数量子化誤差を逐次的に最小化する方法と加算順序の最適化法を明らかにすることにより、演算誤差と係数量子化誤差が共に最小となるデジタルフィルタの合成法を得ている。図1は、ここで得られた合成法を4次低域通過デジタルフィルタに適用して得られた量子化誤差最小構造と従来から知られている直接形Ⅱ、並列形の構造に対する演算誤差の計算例を示している。この図から分かるように、合成された構造は他の構造と比べて誤差が非常に小さくなっており、本合成法の有効性は明らかである。

第6章では、リミットサイクルを発生せず、量子化誤差やアンダフロー誤差、オーバーフロー誤差が全て最小となるデジタルフィルタの総合的合成法について考察している。まず、総合的合成のための基礎的考察として、各種の誤差の構造依存の関係について検討し、演算誤差の小さい構造は、係数量子化誤差やアンダフロー誤差、オーバーフロー誤差も小さいことを明らかにしている。そこで、第6章では、リミットサイクルと演算誤差に着目している。次に、非線形システムの漸近安定性の観点から、リミットサイクルが発生しないための条件を与えている。次いで、演算誤差最小デジタルフィルタの合成を行い、合成されたデジタルフィルタがリミットサイクルを発生しないための条件を満足することを明らかにしている。この結果、リミットサイクルを発生せず、かつ、各種の誤差が全て最小となるデジタルフィルタの総合的合成法が得られる。また、得られた結果を固定小数点演算を用いた場合と比較することにより、各演算方式を用い

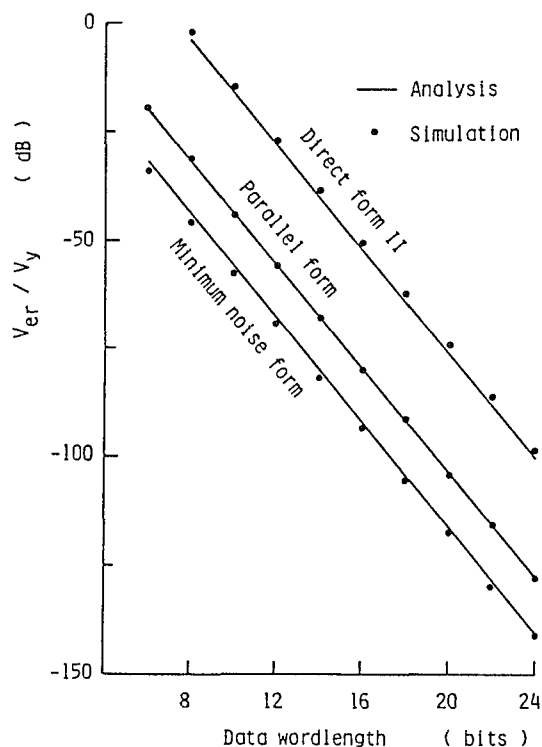
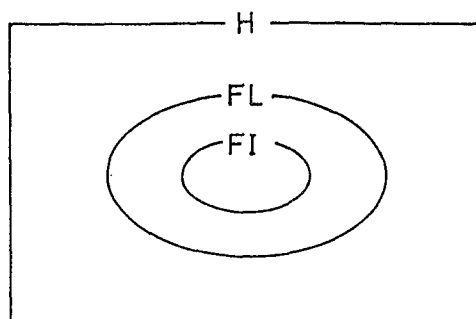


図1 演算誤差に起因する出力誤差対信号比とデータ語長の関係

たりミットサイクルのない量子化誤差最小デジタルフィルタの集合の関係(図2)を明らかにしている。さらに、合成されたデジタルフィルタを具体的に実現する際に問題となる仮数部と指数部のビット配分について考察し、演算誤差とアンダフロー誤差、オーバフロー誤差が総合的に最小となる最適ビット配分を求めている。最後に、合成例と最適ビット配分の例を示し、本章で得られた結果の妥当性と有効性を明らかにしている。

第7章は結言である。



- H : 同一の伝達関数を有するデジタルフィルタの集合
- FL : 浮動小数点演算を用いたリミットサイクルのない量子化誤差最小デジタルフィルタの集合
- FI : 固定小数点演算を用いたリミットサイクルのない量子化誤差最小デジタルフィルタの集合

図2 デジタルフィルタの集合

## 審 査 結 果 の 要 旨

最近ディジタルフィルタは、広いダイナミックレンジを必要とする分野にも使用されるようになり、これに伴い浮動小数点演算を用いたフィルタが要求されるようになってきた。しかし、従来ディジタルフィルタ設計の基礎となる合成理論に関する研究は、主に固定小数点演算を用いた場合であり、浮動小数点演算を用いたフィルタの統一的合成理論については、ほとんど研究がなされていなかった。

本論文は、状態方程式が浮動小数点演算を用いたフィルタの構造を一義的に表現できることに着目し、有限語長に起因する特性劣化が最小となるディジタルフィルタの統一的合成理論を与えたもので、全文7章よりなる。

第1章は緒言である。

第2章では、浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの概要を述べると共に、固定小数点演算を用いた場合と比べて、異なる事項や問題点を明確にしている。

第3章では、浮動小数点演算を用いた有限語長ディジタルフィルタについて、状態方程式に基づく表現法を与えることにより、有限語長に起因する特性劣化が統一的に取り扱えることを示している。

第4章では、量子化誤差が最小のフィルタ構造を合成するために必要な、演算誤差と係数量子化誤差の解析を行い、これらの誤差が入力や状態変数の分散に比例すること、固定小数点演算を用いた場合と比べて構造依存性が強い傾向にあることなどを明らかにしている。また、取り扱いが困難とされている、アンダフローおよびオーバーフロー誤差の解析を行い、その妥当性を計算例により示している。

第5章では、前章で得られた成果に基づき、量子化誤差最小ディジタルフィルタの合成が、係数量子化誤差の最小化と、加算順序の最適化によって達成されることを示し、合成例によってその有効性を確かめている。

第6章では、量子化誤差が最小であり、かつリミットサイクルが発生しない、浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの統一的合成理論を与えると共に、得られるフィルタの集合が、固定小数点演算を用いたこの種のフィルタの集合を、部分集合として包含することを見出し、その関係を明らかにしている。また、仮数部と指数部の最適ビット配分法についても考察を行っている。これらは、本研究の重要な成果である。

第7章は結言である。

以上要するに本論文は、従来ほとんど研究がなされていなかった、浮動小数点演算を用いたディジタルフィルタの統一的合成理論を確立し、ディジタルフィルタ設計の基礎となる有用な知見を与えたもので、電子工学および情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。